



كلية العلوم
السملاية - مراكش
FACULTÉ DES SCIENCES
MARRAKECH - SEMLALIA

Département de Mathématiques

Sciences Mathématiques et Applications

Projet de Fin d'Études

**Principe du maximum et applications en
analyse complexe.**

Réalisé par :

Benfanich Abderrahmane

Sous la direction du :

Professeur : Ezzinbi Khalil

Soutenue le 16/05/2023 devant la commission d'examen :

Professeur Baroun Mahmoud, Faculté des sciences Semlalia, Marrakech

Professeur Ezzinbi Khalil, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech

Professeur Maniar Lahcen, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech

Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé tout au long de la réalisation de ce mémoire. Tout d'abord, je souhaite remercier **Professeur Khalil Ezzinbi** pour ses conseils, sa patience et son soutien indéfectible tout au long de ce processus.

Je souhaite également remercier **Professeur Lahcen Maniar** et **Professeur Mahmoud Baroun**, qui ont généreusement consacré leur temps et leurs efforts pour évaluer mon travail et me fournir des commentaires constructifs.

Je suis également reconnaissant envers **les professeurs de la filière SMA** qui ont partagé leurs connaissances et leur expertise, ainsi que leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études.

Je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont contribué à la réussite de ce mémoire. Merci encore pour votre soutien et votre encouragement tout au long de cette aventure académique.

Table des matières

Introduction	4
Histoire du principe du maximum	5
Présentation du mémoire	6
1 Fonctions holomorphes	7
1.1 L'ensemble \mathbb{C}	7
1.2 Fonctions d'une variable complexe	10
1.3 Intégrale d'une fonction le long d'un chemin	11
1.4 Les séries entières	12
1.5 Fonctions holomorphes	13
2 Principe du maximum	20
2.1 Principe du maximum pour les fonctions holomorphes	20
2.2 Propriété de la moyenne	23
2.3 Principe du maximum pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne	25
2.4 Applications du principe du maximum	27
2.4.1 Théorème de d'Alembert-Gauss	27
2.4.2 Caractérisation des fonctions holomorphes bijectives sur $D(0,1)$	27
2.4.3 Estimation de nombre des racines	30
2.4.4 Théorème de l'application ouverte	31
2.4.5 Le problème de Dirichlet	32
2.5 Généralisation du principe du maximum	35
2.6 Réciproque du principe du maximum	39
Conclusion	40
Bibliographie	41

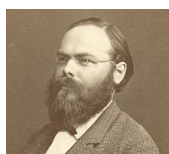
Introduction

L'analyse complexe est un domaine de mathématiques traitant les fonctions à valeurs complexes qui sont dérivables par rapport à une variable complexe.

Les fonctions dérivables sur un ouvert du plan complexe sont appelées holomorphes et satisfont de nombreuses propriétés plus fortes que celles vérifiées par les fonctions dérivables en analyse réelle. Entre autres, toute fonction holomorphe est analytique (c'est-à-dire développable en série entière) et vérifie le principe du maximum.

L'objet de ce mémoire est d'étudier le principe du maximum, il stipule que si une fonction holomorphe est définie sur un ouvert borné connexe Ω et qu'elle atteint son maximum dans Ω , alors f est constante sur Ω .

Il existe de nombreuses versions du principe du maximum, valables pour diverses catégories de fonctions. Nous allons donner des versions autres que celle des fonctions holomorphes, comme pour les fonctions vérifiant la propriété de la sous moyenne et les fonctions sous harmoniques. Dans notre mémoire, nous utiliserons ce principe pour démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss et caractériser les fonctions holomorphes bijectives du disque unité vers lui-même, également pour estimer le nombre de racines d'une fonction holomorphe sur un disque. Nous démontrerons aussi le théorème de l'application ouverte, qui est crucial en théorie des fonctions holomorphes. En outre, nous montrons que le problème de Dirichlet admet une solution unique sur un ensemble ouvert connexe borné, et nous donnons sa solution explicite sur un disque. Enfin, nous généralisons ce principe à un ensemble non borné, et nous concluons en indiquant que "presque toutes" les fonctions continues satisfaisant le principe du maximum sont holomorphes.



Schwarz



Dirichlet

Histoire du principe du maximum



Riemann

Riemann a écrit en 1851 "*Eine harmonische Function u kann nicht in einem Punkt im Innern ein Minimum oder ein Maximum haben, wenn sie nicht überall constant ist.* (Une fonction harmonique u ne peut avoir ni un minimum ni un maximum à un point intérieur sauf s'elle est constante.)" **Burkhardt** formulé ce théorème pour les parties réelles et imaginaires des fonctions holomorphes dans p.126 dans son livre, Dans son travail de 1906 **OsGOOD** a également traité les principes du maximum et du minimum seulement pour fonctions harmoniques.

Il semble difficile de savoir quand et où le théorème a été formulé pour les fonctions holomorphes et prouvé pour elles sans une réduction au cas harmonique.

Même les experts dans l'histoire de la théorie fonctionnelle ne pourrait pas dire si le principe du maximum se produit dans **Cauchy** travaille ou non. **C. Caratheodory** (Mathématicien allemand d'origine grecque, 1873-1950, à l'origine ingénieur, assistant de **A. Sommerfeld** ; à Munich à partir de 1924) a donné sa simple preuve du lemme de **Schwarz** en 1912 par le principe du maximum des fonctions holomorphes, mais ce faisant, il ne dit rien de cet important théorème. **Hurwitz** discuté le théorème dans son *Vorlesunen über allgenneine Funktionentheorie elliptische Funktionen* (P. 107) qui a été publié pour la première fois en 1922 par **Julius Springer**, Berlin.

En 1915 **L. Bieberbach** (1886-1982) a écrit dans son petit Göschen volume *Einführung in die konforme Abbildung* (p. 8) : "*Wenn $f(z)$ im Inneren eines Gebietes G regulär und endlich ist, so besitzt $|f(z)|$ kein Maximum im Inneren des Gebietes. Die Behauptung (bekanntlich eine leichte Folgerung des Cauchyschen Integralsatzes) kann auch unmittelbar aus der Gebiets-treue gefolgert werden.* (Si $f(z)$ est holomorphe et fini à l'intérieur d'une région G , alors $|f(z)|$ n a pas de maximum. Cette affirmation (connue pour être une conséquence facile du théorème intégral de Cauchy) peut également être immédiatement déduite du théorème de l'application ouverte.)" Dans le deuxième volume de son travail, qui est apparu en 1927, **Bieberbach** a parlé du "principe du maximum."



Cauchy

Présentation du mémoire

Dans le **chapitre 1**, on rappelle la topologie de \mathbb{C} , les notations et les notions préliminaires nécessaires en vue de les utiliser dans le chapitre suivant, ensuite on donne un rappel sur les fonctions holomorphes, et nous considérons quelques définitions et théorèmes nécessaires sur les fonctions holomorphes et harmoniques que nous avons besoin de savoir comme la formule de **Cauchy**, principe de prolongement analytique et le théorème des zéros isolés.

Dans le **chapitre 2**, nous expliquons d'abord le principe du maximum. Nous montrons que les fonctions holomorphes vérifient ce principe. Autrement, on définit les fonctions qui vérifient la propriété de la sous moyenne et on montre que les fonctions sous harmoniques possèdent cette propriété. Nous prouvons également que les fonctions continues qui vérifient la propriété de la sous moyenne vérifient ce principe. Ensuite, nous étudions les fonctions qui vérifient ce principe et leurs propriétés. En outre, nous explorons les applications de ce principe dans la théorie des fonctions holomorphes et les équations en dérivées partielles, on démontre le théorème de **d'Alembert-Gauss** et de l'application ouverte. De plus, on caractérise les fonctions holomorphes bijectives de $D(0,1)$ vers $D(0,1)$ par le lemme de **Schwarz** et on donne la solution explicite du problème de **Dirichlet** et on montre qu'elle est unique. En fin, nous présentons une généralisation de ce principe par la méthode de **Phragmén-Lindelöf** et sa réciproque.



Phragmén



Lindelöf

Fonctions holomorphes

Dans ce chapitre, nous donnons un rappel sur les fonctions holomorphes et leurs propriétés analytiques.

1.1 L'ensemble \mathbb{C}

L'ensemble des nombres complexes, noté par, \mathbb{C} est une extension de l'ensemble des nombres réels, qui permet de représenter les nombres sous forme d'une somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, écrite sous la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i au carré c'est -1 . En d'autres termes, il est défini de la manière suivante :

$$\mathbb{C} = \{a + ib : (a, b) \in \mathbb{R}\}, \text{ avec } i^2 = -1.$$

• $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

Où les deux lois $+$ et \cdot sont définies par :

$$(x + iy) + (z + it) = x + z + i(y + t) \text{ et } (x + iy) \cdot (z + it) = xz - yt + i(xt + yz), \forall (x + iy), (z + it) \in \mathbb{C}.$$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit :

1) les parties réelle et imaginaire sont respectivement données par :

$$\operatorname{Re}(z) = a \text{ et } \operatorname{Im}(z) = b,$$

2) le conjugué de z par :

$$\bar{z} = a - ib,$$

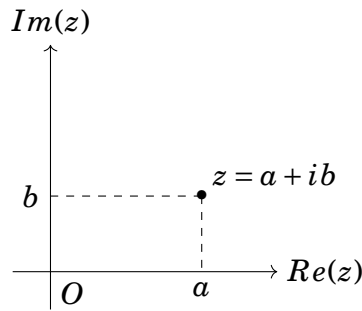
3) le module de z est défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

donc on peut représenter les nombres dans le repère cartésien comme les points de \mathbb{R}^2 .



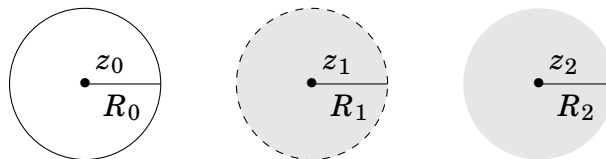
L'application :

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\longmapsto |z|, \end{aligned}$$

définit une norme sur \mathbb{C} , donc $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace normé.

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$,

- 1) $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r ,
- 2) $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, est le disque fermé de centre z_0 et de rayon r . De plus $\overline{D}(z_0, r) = \overline{D(z_0, r)}$,
- 3) $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, est le cercle de centre z_0 et de rayon r . De plus $C(z_0, r) = \partial D(z_0, r) = \overline{D(z_0, r)} \setminus D(z_0, r)$.

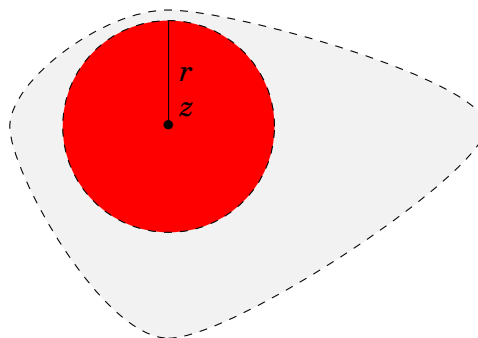


Cercle, disque ouvert, disque fermé.

• Ouvert et fermé dans \mathbb{C} :

Un ensemble O est ouvert si et seulement si $\forall z \in O, \exists r > 0, D(z, r) \subset O$.

Un ensemble F est fermé si et seulement si $F^c = C_{\mathbb{C}}^F$ est un ouvert de \mathbb{C} .



un ensemble ouvert

• L'ensemble \mathbb{C} muni de la norme $|\cdot|$ est complet.

• Les ensembles compacts dans \mathbb{C}

La compacité est une notion très importante.

Théorème 1.1.1 [2].

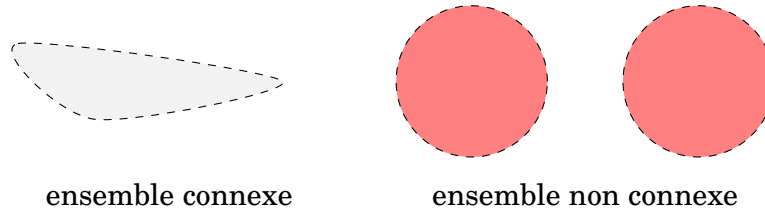
$K \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si K est fermé borné.

• **Les ensembles connexes dans \mathbb{C}**

La connexité est une notion fondamentale. Elle signifie qu'un ensemble ne peut pas être divisé en deux parties ouvertes disjointes, tandis que la connexité par arc signifie qu'il existe un chemin continu qui relie n'importe quel deux points de l'ensemble, en fin, la convexité impose que ce chemin doit être un segment. Dans la section suivant, nous donnons les définitions mathématiques de ces notions et les relations entre eux dans l'ensemble \mathbb{C} .

Définition 1.1.1 [1].

Soit A un ensemble non vide de \mathbb{C} . A est dit connexe si et seulement si $\nexists O_1$ et O_2 deux ouverts de \mathbb{C} tels que $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$, $O_1 \cap A \neq \emptyset$, $O_2 \cap A \neq \emptyset$ et $A \subset O_1 \cup O_2$.

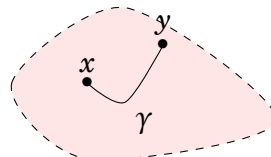


Théorème 1.1.2 [1].

Soit A un ensemble connexe dans \mathbb{C} . On suppose que B est un ensemble ouvert et fermé non vide dans A (c'est-à-dire $A \cap B$ est fermé et ouvert dans \mathbb{C}). Alors, $B = A$.

Définition 1.1.2 [1].

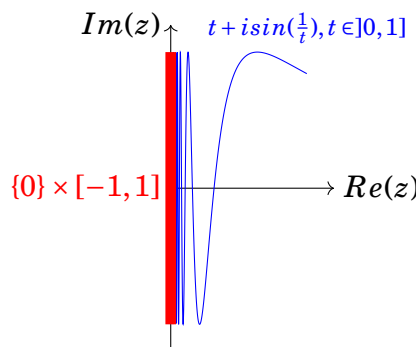
Un ensemble A est dit connexe par arc si et seulement si $\forall x, y \in A$, $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow A$ une application continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.



un ensemble connexe par arc

Proposition 1.1.1 [1].

Soit A un ensemble de \mathbb{C} . Supposons que A est connexe par arcs. Alors A est connexe.



Exemple : Un ensemble connexe qui n'est pas connexe par arc.

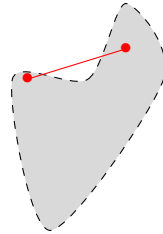
Théorème 1.1.3 [1].

Soit O un ouvert de \mathbb{C} . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

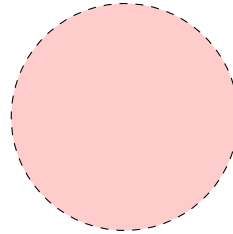
- i) O est connexe.
- ii) O est connexe par arcs.

Définition 1.1.3 [1].

Un ensemble A est dit convexe si et seulement si $\forall z, w \in A, \forall t \in [0, 1], tz + (1 - t)w \in A$.



un ensemble non convexe



un ensemble convexe

Proposition 1.1.2 [1].

Soit un ensemble A de \mathbb{C} . Alors,

$$A \text{ est convexe} \implies A \text{ est connexe par arcs} \implies A \text{ est connexe.}$$

1.2 Fonctions d'une variable complexe

Dans cette section, nous étudions les fonctions d'une variable complexe et leurs propriétés. Une fonction de variable complexe est une application définie sur un ensemble A de \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 [2].

Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in A$, on dit que $f(z) \xrightarrow[z \in A]{z \rightarrow z_0} b$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall z \in A, |z - z_0| < \gamma \implies |f(z) - b| < \varepsilon$, on écrit $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = b$.

Définition 1.2.2 [2].

f est dite continue en z_0 si et seulement si $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0)$. On dit que f est continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A .

Remarques 1.2.1 [2] :

Pour $z = x + iy \in A$. On écrit $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Alors, f est continue sur A si et seulement si P et Q sont continues sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}$.

Théorème 1.2.1 [2].

Soient f, g deux fonctions continues sur A et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- i) $f + g$ est continue sur A .
- ii) λf est continue sur A .

- iii) fg est continue sur A .
- iv) On suppose que $g(z) \neq 0, \forall z \in A$. Alors, $\frac{f}{g}$ est continue sur A .
- v) si $f : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : A_2 \rightarrow \mathbb{C}$ et $f(A_1) \subset A_2$ alors $g \circ f$ est continue sur A_1 .

Exemples 1.2.1 :

Les fonctions polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, sont continues sur \mathbb{C} .

Théorème 1.2.2 [1].

Soient A un ensemble non vide de \mathbb{C} et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que A est connexe. Alors, $f(A)$ est connexe.

Théorème 1.2.3 [1].

Soient A un ensemble non vide de \mathbb{C} et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit K est compact dans A . Alors, $f(K)$ est compact.

1.3 Intégrale d'une fonction le long d'un chemin

Dans cette section, nous étudions l'intégrale d'une fonction le long d'un chemin dans le plan complexe.

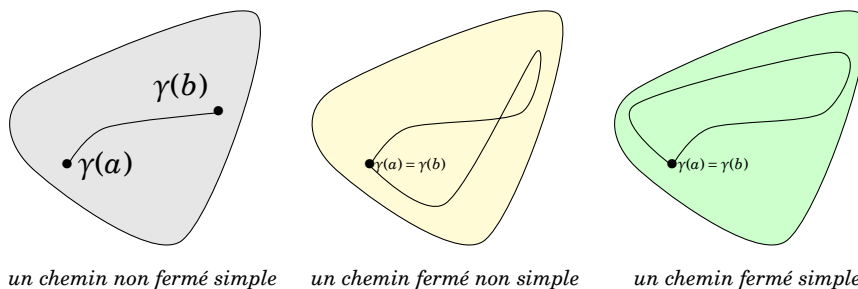
Définition 1.3.1 [2].

Soient A un ensemble non vide de \mathbb{C} et $C \subset A$. On dit que C est un chemin dans A si et seulement si $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A$ une application continue telle que $\gamma([a, b]) = C$. De plus, on appelle γ la paramétrisation du chemin C .

Remarques 1.3.1 [2] :

Soient O un ensemble non vide de \mathbb{C} et $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ une paramétrisation d'un chemin C de O . Alors :

- i) Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que C est un chemin fermé.
- ii) Si γ est injective sur $]a, b[$, on dit que C est un chemin simple.



iii) Un chemin C est orienté positivement (respectivement négativement), s'il est de la forme suivante :

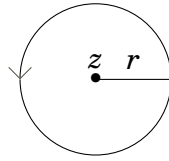


(a) chemin orienté positivement. (b) chemin orienté négativement.

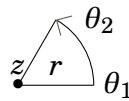
On le note C^+ (respectivement C^-).

Exemples 1.3.1 :

i) Soit $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_1(t) = z + re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $r > 0$, est une paramétrisation du cercle de centre z et de rayon r orienté positivement.



ii) $\gamma_2 : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_2(t) = z + re^{it}$, $\forall t \in [\theta_1, \theta_2]$ avec $r > 0$, est une paramétrisation du arc d'un cercle de centre z et de rayon r orienté positivement.



Définition 1.3.2 [2].

Soient A un ensemble non vide de \mathbb{C} et C un chemin dans A de paramétrisation de classe C^1 . Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, on définit $\int_C f(z)dz$ par :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

où γ est une paramétrisation du chemin C .

1.4 Les séries entières

Dans cette section, nous étudions les séries entières. Les séries entières sont des séries de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où a_n sont des coefficients complexes. Nous verrons comment utiliser la règle de d'Alembert et la règle d'Hadamard pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Définition 1.4.1 [2].

Une série entière est une série de fonctions de la forme suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On définit $R = \sup\{r \geq 0 : \forall z \in D(0, r), \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n \text{ converge}\} \in [0, +\infty]$, R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Les deux théorèmes suivants permettent de calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 1.4.1 [2] (Règle de d'Alembert).

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, alors $R = \frac{1}{l}$, avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Théorème 1.4.2 [2] (Règle d’Hadamard) .

Soit $l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, alors $R = \frac{1}{l}$, avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Exemples 1.4.1 :

1) La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence $+\infty$, de plus la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

s’appelle l’exponentielle complexe et elle vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\exp(0) = 1$,
- ii) $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$,
- iii) soit $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2i\pi k$,
- iv) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

De cette fonction, on peut définir cos et sin complexe par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \text{ et } \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

2) La série entière $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1, elle s’appelle la série géométrique, de plus $\forall z \in D(0, 1)$, $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Proposition 1.4.1 [2].

Soit R le rayon de convergence d’une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors , Si $|z| > R$, la série diverge. Pour tout $\rho < R$ la série converge normalement sur $D(0, \rho)$, par suite, elle converge uniformément sur $D(0, \rho)$.

Remarques 1.4.1 [2] :

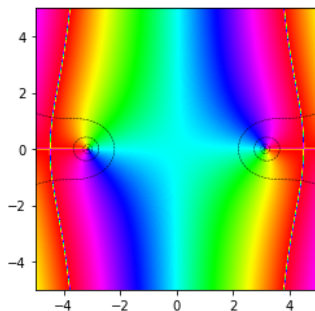
En général, une série entière est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

1.5 Fonctions holomorphes

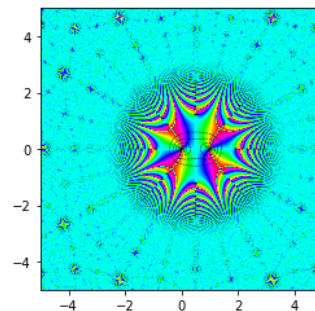
Pour la suite Ω est un ouvert de \mathbb{C} .

Définition 1.5.1 [2].

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. f est holomorphe en z_0 si et seulement $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existe dans \mathbb{C} . On dit que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est holomorphe en tout point de Ω . On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l’ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .



(a) visualisation d’une fonction holomorphe



(b) visualisation d’une fonction non holomorphe

Le théorème suivant donne des règles pour calculer la dérivée d'une fonction holomorphe.

Théorème 1.5.1 [2].

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

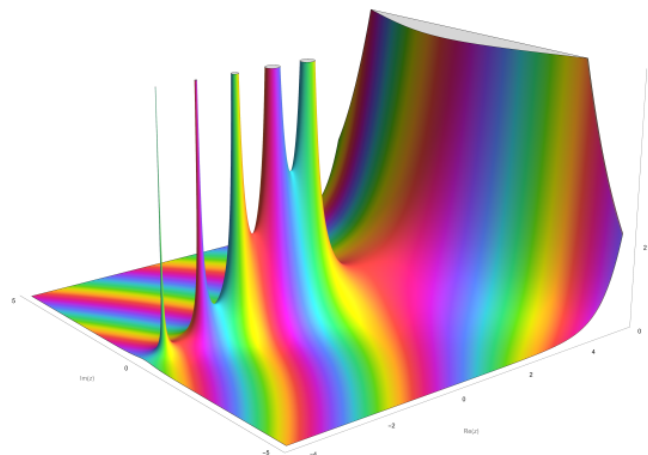
- 1) fg est holomorphe sur Ω et $(fg)' = f'g + fg'$.
- 2) $f + \lambda g$ est holomorphe sur Ω et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$.
- 3) On suppose que $\forall z \in \Omega, g(z) \neq 0$ sur Ω . Alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- 4) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Alors, $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_1 et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \forall z \in \Omega_1$.

Remarques 1.5.1 :

Soit f une fonction holomorphe sur Ω et $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors, $f'(x + iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x + iy)$.

Exemples 1.5.1 :

- 1) La fonction $f : z \mapsto z^n$ est holomorphe sur \mathbb{C} et $f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.
- 2) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Alors $z \mapsto \sum a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0, r)$ et sa dérivée est $z \mapsto \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. De plus la série $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence r .
- 3) Les fonctions $z \mapsto \exp(z), z \mapsto \cos(z)$ et $z \mapsto \sin(z)$ sont holomorphes sur \mathbb{C} , de plus ses dérivées respectivement sont $z \mapsto \exp(z), z \mapsto -\sin(z)$ et $z \mapsto \cos(z)$.
- 4) La fonction gamma définie par, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, est holomorphe, sa dérivée est donnée par $\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on montre par intégration par partie que $\Gamma(z) = z\Gamma(z - 1)$ et par récurrence que $\forall n \geq 1, \Gamma(n) = (n - 1)!$.



graphe du module de la fonction gamma

5) Soient $z = x + iy \in \{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0\}$ et $\alpha > 0$. On définit z^α par

$$z^\alpha = \begin{cases} \exp(\alpha(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan(\frac{y}{x}))) & , \text{ si } x > 0. \\ z^\alpha = y^\alpha \exp(i\alpha\frac{\pi}{2}) & , \text{ si } x = 0 \text{ et } y > 0. \\ z^\alpha = (-y)^\alpha \exp(-i\alpha\frac{\pi}{2}) & , \text{ si } x = 0 \text{ et } y < 0. \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \text{ et } y = 0. \end{cases}$$

La fonction $z \mapsto z^\alpha$ est continue sur $\{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0\}$ et holomorphe sur $\{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$ et sa dérivée est $z \mapsto \alpha z^{\alpha-1}$.

Remarques 1.5.2 [2] :

La différentiabilité est très faible par rapport à l'holomorphie. En effet, $f : z \mapsto \bar{z}$ est de classe C^∞ au sens de la différentiabilité. Or, f n'est pas holomorphe. Pour $z = x + iy \simeq (x, y)$, $f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = (x, -y)$ est de classe C^∞ . Or,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

si $h \in \mathbb{R}$, alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = 1,$$

si $h \in i\mathbb{R}$, alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = -1.$$

D'où, f n'est pas holomorphe même si il est de classe C^∞ au sens de la différentiabilité.

Le théorème de Cauchy-Riemann est un résultat fondamental de l'analyse complexe qui caractérise les fonctions holomorphes.

Théorème 1.5.2 [2] (de Cauchy-Riemann).

Soient f une fonction complexe sur Ω définie par $f : x + iy \mapsto P(x, y) + iQ(x, y)$ et $z_0 \in \Omega$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes,

i) f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$.

ii) P et Q sont différentiables en (x_0, y_0) et $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$.

Remarques 1.5.3 [2] :

Soit

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

f vérifie les équations de Cauchy-Riemann $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$.

Théorème 1.5.3 [2].

f est holomorphe sur $\Omega \iff P$ et Q sont différentiables et vérifient les équations de Cauchy-Riemann sur $\{(x, y) : x + iy \in \Omega\}$.

Exemples 1.5.2 [2] :

1) Supposons que Ω est connexe. Soit f une fonction holomorphe sur Ω , si $f(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in \Omega$, alors f est constante. En effet, $f(z) = P(x, y) + i0$, d'où, d'après les équations de Cauchy-Riemann et comme Ω est connexe, on déduit que, P est constante, alors f est constante.

2) Supposons que Ω est connexe, f est constante $\iff f' = 0$. En effet, (\implies), $0 = f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(z) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(z)$, d'où, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, alors par les équations de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, donc comme Ω est connexe, on déduit que P et Q sont constantes, d'où, f est constante.

L'homotopie entre deux chemins est une notion fondamentale en analyse complexe. Elle décrit la relation entre deux chemins continus dans le plan complexe qui peuvent être déformés l'un dans l'autre sans quitter leur région commune. Dans la définition suivante, on définit l'homotopie entre deux chemins fermés.

Définition 1.5.2 [5].

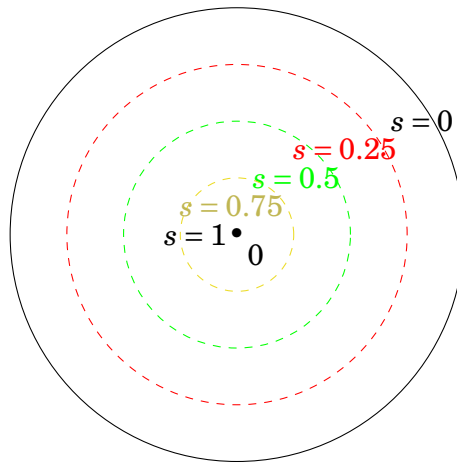
Soient O un ouvert et γ_1, γ_2 deux chemins dans O , on appelle déformation de γ_1 à γ_2 toute application continue $\delta : [0, 1]^2 \rightarrow O$, vérifiant

$$\delta(t, 0) = \gamma_1(t), \delta(t, 1) = \gamma_2(t), \forall t \in [0, 1].$$

Si γ_1 et γ_2 deux chemins fermés et $\delta(0, s) = \delta(1, s), \forall s \in [0, 1]$ on dit que γ_1 et γ_2 sont homotopes dans O .

Exemples 1.5.3 :

Soit $\gamma(t) = e^{2i\pi t}, \forall t \in [0, 1]$ la paramétrisation du cercle unitaire. Alors $\delta(t, s) = \gamma(t)(1 - s)$ est une déformation de γ à 0 dans \mathbb{C} et de plus γ est homotope à 0 dans \mathbb{C} .



Déformation du cercle à un point.

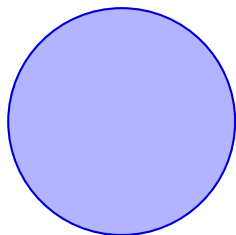
Un ensemble simplement connexe dans \mathbb{C} est un ensemble qui ne contient aucun trou. En d'autres termes, il est connexe et pour tout chemin fermé dans cet ensemble, il est possible de le contracter de manière continue à un point sans quitter l'ensemble.

Définition 1.5.3 .

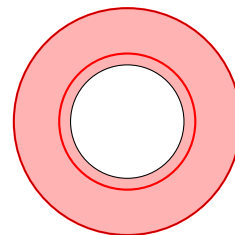
On dit que Ω est simplement connexe si et seulement si tout chemin est homotope à un point dans Ω , c'est-à-dire pour tout chemin fermé γ dans $\Omega, \exists z \in \Omega, \exists \delta : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ continue telle que pour tout $t \in [0, 1], \delta(t, 0) = \gamma(t)$ et $\delta(t, 1) = z$ et pour tout $s \in [0, 1], \delta(0, s) = \delta(1, s)$.

Exemples 1.5.4 :

Tout disque est simplement connexe.



Simply connexe



N'est pas simplement connexe

Le théorème de Cauchy est un résultat fondamental qui confirme que si une fonction holomorphe est définie sur un ouvert simplement connexe, alors l'intégrale de cette fonction sur tout chemin fermé dans ce ouvert est nulle.

Théorème 1.5.4 [2](Cauchy).

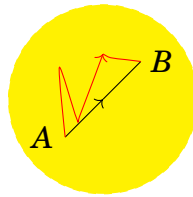
Supposons que Ω est simplement connexe, f une fonction holomorphe sur Ω et C un chemin fermé simple dans Ω . Alors,

$$\int_{C^+} f(z)dz = 0.$$

Corollaire 1.5.1 [2].

Supposons que Ω est simplement connexe, f une fonction holomorphe sur Ω . Soient C_1 et C_2 deux chemins simples dans Ω d'extrémités A, B , orientés de A vers B . Alors,

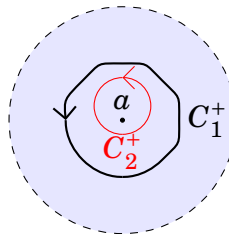
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$



Corollaire 1.5.2 [2].

Supposons que Ω est simplement connexe. Soit $a \in \Omega$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Soient C_1 et C_2 deux chemins fermés simples homotopes à a dans Ω . Alors,

$$\int_{C_1^+} f(z)dz = \int_{C_2^+} f(z)dz$$



Corollaire 1.5.3 [2].

Supposons que Ω est simplement connexe. Soit $a \in \Omega$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Soit C un chemin fermé simple homotope à a dans Ω . Soient $r > 0$ tels que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Alors,

$$\int_{C^+} f(z)dz = \int_{C^+(a,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})rie^{it} dt.$$

Le théorème suivant est très important pour la suite, il montre que toute fonction holomorphe vérifie ce qu'on appelle la propriété de la moyenne, qui est liée au principe du maximum.

Théorème 1.5.5 [2] (Formule de Cauchy).

Soient f une fonction holomorphe sur Ω et $r > 0$ tels que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Alors,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Le théorème suivant présente un résultat fondamental, c'est que si une fonction est holomorphe, elle est développable en série entière, donc toutes les fonctions holomorphes sont de classe C^∞ .

Théorème 1.5.6 [2].

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω . Alors,

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists r > 0, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, \forall z \in D(z_0, r) \subset \Omega, f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Preuve :

Soit $z_0 \in \Omega, D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Soit $\rho < r$, alors, $\overline{D}(z_0, \rho) \subseteq D(z_0, r)$.

$$\forall w \in C(z_0, \rho), \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1, (*)$$

D'après la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw, z \in D(z_0, \rho),$$

par (*), on déduit que la série $\sum \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n$ est bien définie. De plus, on a :

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n,$$

par (*), la série $\sum \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n$ converge normalement en w sur $C(z_0, \rho)$,

d'où $\sum \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n$ converge uniformément, on déduit que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n.$$

D'où le résultat. □

Corollaire 1.5.4 [2].

Soit f est une fonction holomorphe sur Ω . Alors, f est de classe C^∞ . De plus

$$f^{(n)}(z_0) = \left(\frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right).$$

On déduit aussi que :

$$\left| a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{\sup_{z \in C(z_0, r)} |f(z)|}{r^n}.$$

Corollaire 1.5.5 .

Soit f une fonction holomorphe sur Ω . Alors, $Re(f)$ et $Im(f)$ sont de classe C^∞ (dans le sens de la différentiabilité).

Définition 1.5.4 .

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $z = x + iy \in \Omega$, on pose $f(x, y) = f(x + iy)$, f est dite harmonique sur Ω si et seulement si f est de classe C^2 et $\Delta f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z) = 0$, pour tout z dans Ω .

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On note par u (resp. v) la partie réelle (resp. la partie imaginaire) de f . f est dite harmonique si et seulement si u et v sont harmoniques.

Remarques 1.5.4 :

Soit f une fonction sur Ω de classe C^2 au sens de différentiabilité. On peut permuter les dérivées partielles. Alors, $\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$, de plus, $\Delta \operatorname{Re}(f) = 4 \frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial \bar{z} \partial z}$ et $\Delta \operatorname{Im}(f) = 4 \frac{\partial^2 \operatorname{Im}(f)}{\partial \bar{z} \partial z}$

Exemples 1.5.5 :

Soit f une fonction holomorphe sur Ω . Alors, f , $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont harmoniques. En effet, $2\operatorname{Re}(f) = f + \bar{f}$, de plus, $2 \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}_{=0 (f \in \mathcal{H}(\Omega))} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, comme f est de classe C^∞ , donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est holomorphe, d'où, $2 \frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$, donc $\Delta \operatorname{Re}(f) = 0$.

Remarques 1.5.5 :

On suppose que Ω est connexe. Soit $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction, continue sur $\bar{\Omega}$ et harmonique sur Ω . Supposons que $|f|$ est constante sur $\bar{\Omega}$, alors f est constante sur $\bar{\Omega}$. En effet, la fonction $|f|^2 = u^2 + v^2$ est constante sur Ω , donc, $u \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + v \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$ sur Ω ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ sur } \Omega &\implies \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ &\implies \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0 \text{ sur } \Omega \end{aligned}$$

D'où $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ sur Ω et $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ sur Ω . Comme Ω est connexe, les fonctions u et v sont ainsi constantes sur Ω donc par continuité, elles sont constantes sur $\bar{\Omega}$.

Théorème 1.5.7 [5] (de factorisation) .

Supposons que Ω est connexe dans \mathbb{C} . Soit f une fonction holomorphe sur Ω non nulle. Soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$, alors, il existe un $p \geq 1$ qui s'appelle la multiplicité de a et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- i) $\forall z \in \Omega, f(z) = (z - a)^p g(z)$.
- ii) g est holomorphe et $g(a) \neq 0$.

Définition 1.5.5 [2].

Soient O un ensemble et $a \in O$. On dit que a est un point d'accumulation de O , s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset O$ injective telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Le théorème suivant est un résultat très fort, il stipule que si deux fonctions coïncident dans un ensemble qui admet un point d'accumulation, ces deux fonctions sont égales.

Théorème 1.5.8 [2] (Principe du prolongement analytique) .

Supposons que Ω est connexe. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que l'ensemble $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω . Alors, $f = g$.

Corollaire 1.5.6 [2].

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω connexe. On suppose que $f = g$ sur $D(a, r) \subset \Omega$. Alors, $f = g$ sur Ω .

Corollaire 1.5.7 (théorème des zéros isolés).

Supposons que Ω est connexe. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante qui s'annule en $z_0 \in \Omega$. Alors

$$\exists r > 0, \forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0.$$

Principe du maximum

Le principe du maximum est un résultat classique de la théorie des fonctions holomorphes, il affirme que, pour une fonction f , holomorphe dans un ouvert connexe borné Ω du plan complexe et continue sur $\overline{\Omega}$, le maximum de $|f|$ ne peut être atteint qu'en un point du bord de Ω sauf si f est constante dans Ω . En d'autres termes,

$$(\exists z_0 \in \Omega, |f(z_0)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|) \implies f \text{ est constante.}$$

L'objectif de ce chapitre est de démontrer ce résultat et de montrer que cette propriété n'est pas uniquement réservée aux fonctions holomorphes, mais également vrai pour les fonctions ayant la propriété de la sous moyenne et les fonctions sous harmoniques.

On rappelle que Ω est un ouvert de \mathbb{C} .

2.1 Principe du maximum pour les fonctions holomorphes

Dans cette section, on montre que les fonctions holomorphes vérifient le principe du maximum.

Lemme 2.1.1 [6].

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], \Phi(x) \leq k$. Alors,

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(x) dx \geq k \implies \Phi(x) = k, \forall x \in [a, b].$$

Preuve :

Supposons par l'absurde qu'il existe un $x_0 \in [a, b]$ tel que $\Phi(x_0) \neq k$, comme $\Phi(x_0) \leq k$, alors $\Phi(x_0) < k$.

On suppose que $x_0 \in]a, b[$, donc par continuité de Φ , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < k - \Phi(x_0)$, d'où $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\Phi(x) < k$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} (b-a)M &= \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} \Phi(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Phi(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b \Phi(x) dx \\ &< (x_0 - \delta - a)k + 2\delta k + (b - x_0 - \delta)k \\ &= (b-a)k, \end{aligned}$$

d'où $M < k$ ce qui est absurde.

Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. On suppose que $x_0 = a$ et de la même manière on montre le résultat pour $x_0 = b$.

Comme le cas précédant, il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [a, a + \delta], \Phi(x) < k$, alors de manière similaire (on divise l'intégrale sur $[a, a + \delta]$ et $[a + \delta, b]$) du cas précédant, on trouve que $M < k$ ce qui est absurde. Donc dans tous les cas, on trouve une contradiction. \square

Théorème 2.1.1 (Principe du maximum pour les fonctions holomorphes).

Supposons que Ω est connexe borné. Soit f une fonction holomorphe sur Ω , continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose que f n'est pas constante. Alors :

$$|f(z)| < \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|, \forall z \in \Omega.$$

Preuve : [6]

Tout d'abord $\overline{\Omega}$ est compact, car il est fermé borné, alors $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$ est bien définie, comme

f est continue sur $\overline{\Omega}$ et l'application $z \rightarrow |z|$ est continue.

Supposons par l'absurde que f n'est pas constante et le maximum est atteint sur Ω , d'autres termes, $\exists z_0 \in \Omega, \sup_{z \in \Omega} |f(z)| = |f(z_0)|$.

On a $f(z_0) \neq 0$, car sinon f est nulle.

Comme Ω est ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Alors, par le théorème de Cauchy 1.5.5, on déduit que :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{*}$$

D'où

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta.$$

Or $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|, \forall \theta \in [0, 2\pi]$, par lemme 2.1.1, il s'ensuit que :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], |f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|.$$

Si on pose $\frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{f(z_0)} = e^{i\Phi(\theta)}$, par (*), on trouve que :

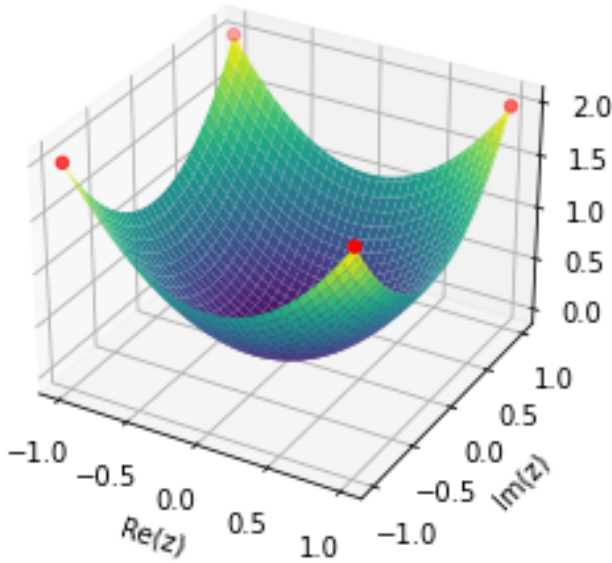
$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\Phi(\theta)} d\theta.$$

On identifie les parties réelles, on trouve que $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\Phi(\theta)) d\theta$, alors encore par 2.1.1 et que $\forall \theta \in [0, 2\pi], \cos(\Phi(\theta)) \leq 1$, on déduit que $\Phi(\theta) \equiv 0 [2\pi], \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

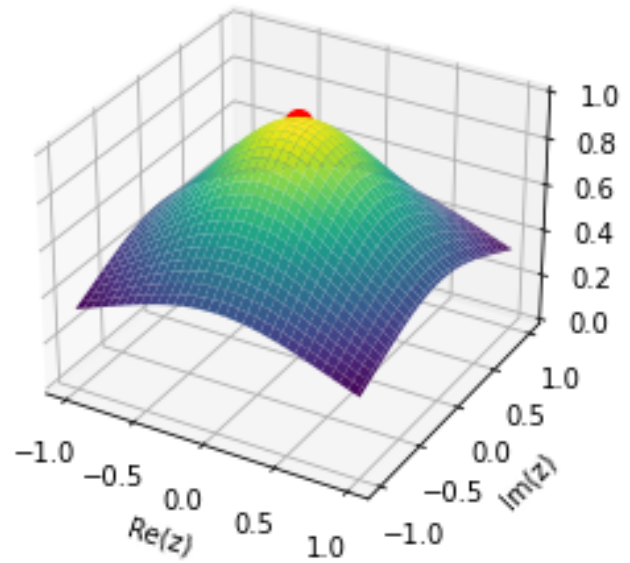
D'où

$$\forall z \in C(z_0, r), f(z) = f(z_0).$$

Comme $C(z_0, r)$ admet un point d'accumulation, d'où f est constante sur Ω et par continuité de f on déduit que f est constante sur $\overline{\Omega}$, ce qui est absurde. \square



(a) Vérifie le principe du maximum.



(b) Ne vérifie pas le principe du maximum.

Figures qui illustrent le principe du maximum géométriquement, où les • sont les maximums.

Corollaire 2.1.1 .

Supposons que Ω est connexe borné. Soit f une fonction holomorphe sur Ω continue sur $\overline{\Omega}$, alors $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$.

Corollaire 2.1.2 .

Supposons que Ω est connexe borné. Soient K un compact dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω . Alors, $\sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in \partial K} |f(z)|$.

Corollaire 2.1.3 Principe du maximum local.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω . Si f admet un maximum local en $z_0 \in \omega$, alors f est constante dans Ω .

Preuve :

D'après le principe du maximum théorème 2.1.1 f est constante sur $\overline{D}(z_0, r)$ et d'après 1.5.6 f est constante sur Ω . □

Remarques 2.1.1 :

On remarque que dans la démonstration du théorème 2.1.1, on a utilisé le fait que $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$, on déduit que si une fonction continue vérifie cette propriété, il vérifie le principe du maximum.

Exemples 2.1.1 :

(i) Supposons que $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient $\overline{D}(0, 1)$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supposons que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Alors, f possède au moins un zéro dans $D(0, 1)$. En effet, on a f est non constante sur $\overline{D}(0, 1)$ car $|f(0)| = 1 < |f(z)| \forall z \in C(0, 1)$, supposons que f ne possède aucun zéro sur $D(0, 1)$, donc $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(0, 1)$ et continue sur $\overline{D}(0, 1)$ (car $f(z) \neq 0, \forall z \in C(0, 1)$), par application du principe du maximum sur $\frac{1}{f}$. On déduit que

$$\forall z \in D(0, 1), \left| \frac{1}{f(z)} \right| < \left| \frac{1}{f(z_0)} \right| < 1. (|z_0| = 1),$$

mais $\frac{1}{f(0)} = 1$, ce qui est contradictoire.

(ii) Supposons que Ω est connexe borné. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, holomorphes sur Ω . On suppose que (f_n) converge uniformément sur $\partial\Omega$. Alors, (f_n) converge uniformément sur $\overline{\Omega}$. En effet, $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{z \in \overline{\Omega}} |f_n(z) - f_m(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f_n(z) - f_m(z)|.$$

Comme (f_n) converge uniformément vers une fonction sur $\partial\Omega$, alors (f_n) est uniformément de Cauchy, il s'ensuit que (f_n) est uniformément de Cauchy sur $\overline{\Omega}$, comme l'espace des fonctions à valeurs complexes continue muni de la norme de convergence uniforme est complet, il s'ensuit que (f_n) converge uniformément vers une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.

Corollaire 2.1.4 .

Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$. On suppose que f n'est pas constante. Alors, la fonction définie par : $M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)| = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \forall r \in]0,R[$, est strictement croissante.

Ce corollaire est une conséquence directe très importante du principe du maximum.

Corollaire 2.1.5 .

Supposons que Ω est connexe. Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω , continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose que f admet un minimum local en $z_0 \in \Omega$. Alors, f est nulle en z_0 .

Preuve :

Supposons que f ne s'annule pas en z_0 , alors $\exists r > 0, \forall z \in \overline{D}(z_0,r) \subset \Omega : |f(z)| \geq |f(z_0)| > 0$, ainsi $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0,r)$ et continue sur $\overline{D}(z_0,r)$ et il admet un maximum en z_0 , donc par le principe du maximum, $\frac{1}{f}$ est constante sur $\overline{D}(z_0,r)$, par suite, f est constante sur $\overline{D}(z_0,r)$, par le principe de prolongement analytique et la continuité, f est constante sur $\overline{\Omega}$. □

2.2 Propriété de la moyenne

Définition 2.2.1 [7](Propriété de la moyenne) .

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f possède la propriété de la moyenne. Si $\forall z_0 \in \Omega, \forall r > 0$ tels que $\overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Exemples 2.2.1 :

Soit f une fonction holomorphe sur Ω , alors par la formule de Cauchy, on déduit que, $Re(f)$ et $Im(f)$ vérifient la propriété de la moyenne. En effet, soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$, ainsi par la formule de Cauchy, $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$. Donc $Re(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f)(z_0 + re^{it}) dt$ et $Im(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Im(f)(z_0 + re^{it}) dt$.

Définition 2.2.2 [7] Propriété de la sous moyenne.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f possède la propriété de la sous moyenne. Si $\forall z_0 \in \Omega, \forall r > 0$ tels que $\overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$, on a

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Exemples 2.2.2 :

Soit f une fonction holomorphe sur Ω , alors par la formule de Cauchy, on déduit que, $|f|$ vérifie la propriété de la sous moyenne.

Rappelons la formule de Green-Riemann sur un disque.

Définition 2.2.3 [7].

On note par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires de \mathbb{C} .

Une 1-forme différentielle sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 toute application de la forme, $\omega : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Proposition 2.2.1 [7].

Toute 1-forme différentielle sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , s'écrit d'une manière unique comme $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où P et Q deux fonctions à valeurs réelles sur U et dx (resp. dy) est définie par $dx(u)(x, y) = x$ (resp. $dy(u)(x, y) = y$) $\forall u \in \Omega$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $w = Pdx + Qdy$.

Définition 2.2.4 [7].

Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . On dit que ω est de classe C^1 si et seulement si P et Q sont de classe C^1 .

Soit C un chemin sur U de paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\forall t \in [0, 1]$ de classe C^1 . On définit $\int_C \omega$ par

$$\int_C \omega = \int_0^1 x'(t)P(x(t), y(t)) + y'(t)Q(x(t), y(t))dt.$$

Théorème 2.2.1 [7] Green-Riemann.

Soient P, Q deux fonctions sur un disque $D = \overline{D}(a, r)$ et $C^+ = C^+(a, r)$. On suppose que $Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert qui contient D . Alors,

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Théorème 2.2.2 [7].

Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 dans Ω . On suppose que $\Delta u \geq 0$ (c'est-à-dire u est sous harmonique) sur Ω . Alors, u vérifie la propriété de la sous moyenne.

Preuve :

Soient $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$ et $r \in [0, r_0]$. Posons

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt, \quad \varphi(r, t) = u(z_0 + re^{it}).$$

φ est de classe C^1 sur $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$, alors $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ existe et continue donc bornée sur $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$ car c'est un compact, donc I est de classe C^1 , d'après le théorème de dérivation sous le signe d'intégrale. de plus, on a

$$I'(r) = \frac{1}{r} \iint_{\overline{D}(z_0, r)} \Delta u(x, y) dx dy, \quad \forall r \in]0, r_0[.$$

En effet, posons

$$x_r(t) = x_0 + r \cos t, \quad y_r(t) = y_0 + r \sin t, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

alors

$$\varphi(r, t) = u(z_0 + re^{it}) = u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) = u(x_r(t), y_r(t)),$$

il s'ensuit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x_r(t), y_r(t)) = \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \sin t \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où

$$rI'(r) = \int_0^{2\pi} \left(r \cos t \frac{\partial u}{\partial x}(x_r(t), y_r(t)) + r \sin t \frac{\partial u}{\partial y}(x_r(t), y_r(t)) \right) dt.$$

La fonction définie par $\gamma(t) = (x_r(t), y_r(t))$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, est une paramétrisation du cercle $\partial D^+(z_0, r)$, de plus $dx = -r \sin t dt$ et $dy = r \cos t dt$, alors

$$rI'(r) = \int_{\partial D^+(z_0, r)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Par la formule de Green-Riemann, on déduit que

$$\forall r \in]0, r_0], I'(r) = \frac{1}{r} \iint_{\overline{D}(z_0, r)} \Delta u(x, y) dx dy,$$

et comme $\Delta u \geq 0$, ensuite $I'(r) \geq 0 \quad \forall r \in]0, r_0]$, donc I est une fonction croissante sur $]0, r_0]$ par continuité de I , on déduit qu'elle est croissante sur $[0, r_0]$, il s'ensuit que

$$2\pi u(z_0) = I(0) \leq I(r_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{it}) dt.$$

D'où u vérifie la propriété de la sous moyenne. □

Corollaire 2.2.1 .

Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 dans Ω . On suppose que $\Delta u = 0$ sur Ω . Alors, u vérifie la propriété de la moyenne.

2.3 Principe du maximum pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne

Dans cette section, on montre que les fonctions admettant la propriété de la sous moyenne vérifient le principe du maximum.

Théorème 2.3.1 ([7] Principe du maximum pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne).

Supposons que Ω est connexe borné.
Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose que u vérifie la propriété de la sous moyenne sur Ω et que u n'est pas constante. Alors,

$$u(z) < \sup_{w \in \partial\Omega} u(w), \quad \forall z \in \Omega.$$

Preuve :

Puisque Ω est borné, alors $\overline{\Omega}$ est compact, donc $\sup_{z \in \Omega} u(z) = \sup_{z \in \overline{\Omega}} u(z)$ existe dans \mathbb{R} . Il suffit de montrer que le sup est atteint uniquement sur la frontière. On le montre par l'absurde. Supposons que u n'est pas constante et $\exists \zeta \in \Omega : M = \sup_{z \in \Omega} u(z) = u(\zeta)$. On pose $A = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$. Comme u est continue, alors A est fermé dans Ω . Par hypothèse $A \neq \emptyset$, on a A est ouvert de Ω . En effet, soit $z_0 \in A \subset \Omega$, alors $\exists r_0 > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Montrons que $D(z_0, r_0) \subset A$. Soit $z \in D(z_0, r_0)$, $\exists 0 < r < r_0, t_0 \in [0, 2\pi], z = z_0 + r e^{it_0}$. Or u vérifie la propriété de la sous moyenne, d'où

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{it}) dt.$$

On écrit

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0) dt = M.$$

On déduit que

$$\int_0^{2\pi} M - u(z_0 + re^{it}) dt = 0.$$

Comme $t \rightarrow M - u(z_0 + re^{it})$ est continue et positive, d'où

$$\forall t \in [0, 2\pi], u(z_0 + re^{it}) = M.$$

En particulier, $u(z) = M$, alors, A est un ouvert fermé non vide dans Ω qui est connexe, donc $A = \Omega$, ce qui entraîne que u est constante sur Ω et par continuité u est constante sur $\overline{\Omega}$, qui est absurde. D'où le résultat. \square

Corollaire 2.3.1 .

Supposons que Ω est connexe borné.

Soit u une fonction à valeurs réelles qui vérifie la propriété de la sous moyenne sur Ω continue sur $\overline{\Omega}$.

Alors $\sup_{z \in \Omega} u(z) = \sup_{z \in \partial\Omega} u(z)$.

Corollaire 2.3.2 .

On suppose que Ω est connexe borné. Soit f une fonction à valeurs complexes non constante continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique sur Ω . Alors,

$$|f(z)| < \sup_{z \in \Omega} |f(z)|, \forall z \in \Omega.$$

Preuve :

Si u (resp. v) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) de f , ensuite u et v sont deux fonctions harmoniques sur Ω à valeurs réelles, en conséquence ils vérifient la propriété de la moyenne. On en déduit que $\forall r > 0$ et $a \in \Omega$ tels que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$, il s'ensuit que la fonction $|f|$ vérifie la propriété de la sous moyenne. Alors, par le théorème 2.3.1 si $\exists z_0 \in \Omega$, $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = |f(z_0)|$, donc $|f|$ est constante, ceci implique que par la remarque 1.5.5 que f est constante. \square

Théorème 2.3.2 ([7] Principe du minimum).

Supposons que Ω est connexe borné. Soit $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose que $-u$ vérifie la propriété de la sous moyenne sur Ω et u n'est pas constante. Alors,

$$\inf_{w \in \partial\Omega} u(w) < u(z), \forall z \in \Omega.$$

On dit que u vérifie le principe du minimum.

Preuve :

On applique le théorème 2.3.1 sur $-u$. \square

Remarques 2.3.1 :

Les fonctions qui admettent la propriété de la sous moyenne ne vérifient pas en général le principe de minimum. En effet, la fonction u définie par

$$u : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2.$$

On a $\Delta u = 2 \geq 0$, alors d'après 2.2.2, u vérifie la propriété de la sous moyenne.

Mais u admet un minimum en $(0, 0) \in]-1, 1[\times]-1, 1[$.

Corollaire 2.3.3 .

Les fonctions harmoniques à valeurs réelles vérifient le principe du maximum et du minimum. Supposons que Ω est connexe. Soit f une fonction holomorphe sur Ω comme $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques, ainsi ils vérifient le principe du maximum et du minimum. On suppose que $Re(f)$ ou $Im(f)$ admet un maximum ou un minimum local, alors $Re(f)$ ou $Im(f)$ est constante, ce qui implique que f est constante sur Ω par continuité f est constante sur $\overline{\Omega}$.

Corollaire 2.3.4 .

Soient $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$. On suppose que f n'est pas constante. Alors, les fonctions définies par

$$A(r) = \sup_{|z-a| \leq r} Re(f(z)), B(r) = \sup_{|z-a|=r} Im(f(z)), \forall r \in]0,R[,$$

sont strictement croissantes, de plus, $e^{A(r)} = \sup_{|z-a|=r} |e^{f(z)}|$ et $e^{B(r)} = \sup_{|z-a|=r} |e^{-if(z)}|$.

Exemples 2.3.1 :

On suppose que Ω est connexe. Soit f une fonction holomorphe sur Ω . On suppose qu'il existe $r > 0$ et $a \in \Omega$ tels que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ et $f(a + re^{it}) \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,2\pi]$. Alors, f est constante sur Ω . En effet, par la formule de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt \in \mathbb{R}$ ce qui donne, $Im(f(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Im(f(a + re^{it})) dt = 0$, Alors, $B(0) = B(r)$, or si f n'est pas constante le corollaire précédant affirme que B est strictement croissante sur $]0,R[$ où $r < R$ et $D(a,R) \subset \Omega$. Ce qui nous donne que f est constante sur $D(a,R)$ qui admet un point d'accumulation, comme Ω est connexe, f est constante.

2.4 Applications du principe du maximum

2.4.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème de d'Alembert-Gauss (Le théorème fondamental de l'algèbre) dit que tout polynôme de degré n à coefficient dans \mathbb{C} , admet exactement n racines dans \mathbb{C} , en autres termes \mathbb{C} est algébriquement clos.

Théorème 2.4.1 d'Alembert-Gauss.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors, P admet n racines dans \mathbb{C} .

Preuve :

P est holomorphe sur \mathbb{C} et $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$, alors il existe $r > 0$ tel que $\forall |z| \geq r$, on a $|P(z)| > |P(0)|$.

Comme $\overline{D}(0,r)$ est compact et P est continue, on déduit que P admet un minimum en $z_0 \in \overline{D}(0,r)$. Or $\forall z \in C(0,r), |P(z)| > |P(0)|$, donc $z_0 \in D(0,r)$. D'après le corollaire 2.1.5 $P(z_0) = 0$. Alors, $P = (X - z_0)Q$ où $deg(Q) = n - 1$, par récurrence on montre que P admet exactement n racine. □

2.4.2 Caractérisation des fonctions holomorphes bijectives sur $D(0,1)$

Le lemme suivant qui est connu sous le nom "Lemme de Schwarz" est une application directe du principe du maximum sur les fonctions holomorphes.

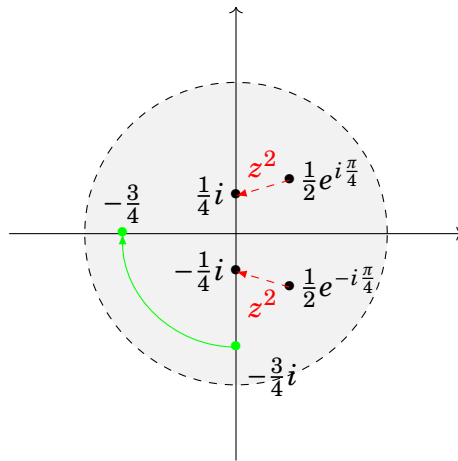
Il a été découvert par le mathématicien allemand Hermann Schwarz au 19-ème siècle.

Lemme 2.4.1 [8] (Lemme de Schwarz).

Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. On suppose que $|f(z)| \leq 1, \forall z \in D(0,1)$ et $f(0) = 0$. Alors,

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D(0,1) \text{ et } |f'(0)| \leq 1.$$

De plus si $\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou $|f'(0)| = 1$. Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1, f(z) = \lambda z$.



$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}$ Rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ $f(z) = z^2$

Remarques 2.4.1 [6] :

On généralise ce théorème pour $g \in \mathcal{H}(D(a,R))$ tel que

$$\begin{cases} \exists M > 0, |g(z)| \leq M \forall z \in D(a,R), \\ g(a) = 0. \end{cases}$$

Posons $f(z) = \frac{g(R \cdot z + a)}{M}$, $\forall z \in D(0,1)$, f vérifie les hypothèses du lemme de Schwarz. On déduit que

$$\begin{cases} |g(z)| \leq M \frac{|z-a|}{R}, \forall z \in D(a,R), \\ |g'(a)| \leq \frac{M}{R}. \end{cases}$$

Preuve : (Lemme de Schwarz 2.4.1.)

Posons $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, pour $z \in D(0,1)$. Comme $f(0) = 0$, alors $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, donc la fonction $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Alors, on a d'après le principe du maximum

$$\forall 0 < r < 1, \forall z \in C(0,r), |g(z)| \leq \frac{\sup_{z \in D(0,r)} |f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1,$$

il s'ensuit

$$|g(z)| \leq 1, \forall z \in D(0,1).$$

On déduit que

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D(0,1).$$

Comme

$$f(z) = z g(z) \Rightarrow f'(z) = g(z) + z g'(z),$$

alors

$$f'(0) = g(0).$$

Donc

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Aussi par le principe de maximum pour les fonctions holomorphes, si

$$(\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|) \text{ ou } (|f'(0)| = 1),$$

donc $\exists \lambda$ tel que $g(z) = \lambda, \forall z \in D(0,1)$, et $|\lambda| = |g(z_0)| = 1$. □

On définit des fonctions bijectives de $D(0,1)$ [resp. $C(0,1)$] vers lui-même. On verra dans la suite que si on les compose avec des rotations, elles caractérisent les applications bijectives de $D(0,1)$ dans lui-même.

Proposition 2.4.1 [8].

On pose $A = D(0, 1)$ ou $A = C(0, 1)$. Soit $\alpha \in D(0, 1)$. On définit $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Alors, φ_α est une application bijective de A vers A .

Preuve :

φ_α est bien définie, car $z \neq \frac{1}{\bar{\alpha}}$ ($|\frac{1}{\bar{\alpha}}| > 1$). On a :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) &= \varphi_\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}} \\ &= \frac{z+\alpha - \alpha + |\alpha|^2z}{1 + \alpha z - \alpha z + |\alpha|^2} \\ &= z \frac{1 + |\alpha|^2}{1 + |\alpha|^2} \\ &= z, \end{aligned}$$

ensuite φ_α est injective. Soit $z \in C(0, 1)$, donc $z = e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} |\varphi_\alpha(z)| &= |\varphi_\alpha(e^{it})| = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}e^{it}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{-it} - \bar{\alpha}} \right| \left(|e^{-it}| = 1 \right) \\ &= 1, \quad (|\bar{z}| = |z|). \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_\alpha(C(0, 1)) \subset C(0, 1),$$

et

$$\varphi_{-\alpha}(C(0, 1)) \subset C(0, 1),$$

on déduit que

$$\varphi_\alpha(C(0, 1)) = C(0, 1).$$

Soit $z \in D(0, 1)$. D'après le principe de maximum

$$|\varphi_\alpha(z)| \leq \sup_{z \in C(0, 1)} |\varphi_\alpha(z)| = 1,$$

alors

$$\varphi_\alpha(D(0, 1)) \subset D(0, 1),$$

et

$$\varphi_{-\alpha}(D(0, 1)) \subset D(0, 1),$$

on déduit que

$$\varphi_\alpha(D(0, 1)) = D(0, 1).$$

□

Le théorème suivant caractérise les applications holomorphes bijectives de $D(0, 1)$ vers lui-même.

Théorème 2.4.2 [8].

Soit $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ une fonction holomorphe bijective. Alors, $\exists \alpha \in D(0, 1)$ et $\exists \lambda \in C(0, 1)$ tel que

$$f = \lambda \varphi_\alpha.$$

Preuve :

Comme f est bijective $\exists \alpha \in D(0, 1)$ tel que $f(\alpha) = 0$. On pose $g = f \circ \varphi_{-\alpha}$, g est holomorphe, car $\varphi_{-\alpha}$ et f sont holomorphes. On a $|g(z)| \leq 1, \forall z \in D(0, 1)$. Car $\forall z \in D(0, 1), |f(z)| < 1$ et $g(0) = f\left(\frac{0+\alpha}{1+\alpha \cdot 0}\right) = f(\alpha) = 0$. Soit $\zeta \in D(0, 1) \setminus \{0\}$. Pour $z_0 = \varphi_{\alpha}(f^{-1}(\zeta)) \in D(0, 1) \setminus \{0\}$, on a $g(z_0) = z_0 \Rightarrow |g(z_0)| = |z_0|$. Alors, par le lemme de Schwarz, on déduit que

$$\exists \lambda : |\lambda| = 1, g = \lambda Id_{D(0,1)}.$$

D'où

$$f = \lambda \varphi_{\alpha}.$$

□

2.4.3 Estimation de nombre des racines

Le théorème suivant est aussi une application du principe du maximum. Il donne une estimation de nombre des racines d'une fonction holomorphe sur un disque.

Théorème 2.4.3 [6].

Soient $f : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \overline{D}(0, 1)$ une fonction continue sur $\overline{D}(0, 1)$, holomorphe sur $D(0, 1)$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $f(0) \neq 0$. Soit n le nombre des zéros de f dans $D(0, \alpha)$. Alors,

$$n \leq \frac{1}{\log\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \log\left(\frac{1}{|f(0)|}\right)$$

Preuve :

Soient z_1, z_2, \dots, z_N les zéros de f dans $D(0, \alpha)$, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ leurs multiplicités respectivement. On remarque que $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. La fonction g définie sur $D(0, 1)$ par

$$\forall z \in D(0, 1), g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{m=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_m}\right)^{\alpha_m}},$$

est holomorphe sur $D(0, 1)$ et continue sur $\overline{D}(0, 1)$, car par le théorème de factorisation 1.5.7 il existe un voisinage de chaque z_m tel que $f(z) = (z - z_m)^{\alpha_m} h(z)$, où $h(z_m) \neq 0$, où h est holomorphe.

Pour $|z| = 1$, on a

$$\left|\frac{z}{z_m}\right| \geq \frac{1}{\alpha}, \forall m \in \{1, \dots, N\}.$$

Alors, par le principe du maximum, on a

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\prod_{m=1}^N \left(\left|\frac{z}{z_m}\right| - 1\right)^{\alpha_m}} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^n},$$

or

$$\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} - 1 > 1 \text{ et } g(0) = f(0) \neq 0,$$

on déduit que

$$n \leq \frac{1}{\log\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \log\left(\frac{1}{|f(0)|}\right).$$

□

Remarques 2.4.2 :

Soient $r, R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ et $f : \overline{D}(a, r) \rightarrow \overline{D}(0, R)$ une fonction continue sur $\overline{D}(a, r)$ et holomorphe sur $D(a, r)$ tel que $f(a) \neq 0$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. On note par n le nombre des zéros de f dans $D(a, ar)$. Alors,

$$n \leq \frac{1}{\log(\frac{1-\alpha}{\alpha})} \log\left(\frac{R}{|f(a)|}\right).$$

En effet, on pose $g(z) = \frac{1}{R}f(rz + a)$, $\forall z \in \overline{D}(0, 1)$, donc g est continue sur $\overline{D}(0, 1)$ et holomorphe sur $D(0, 1)$ et $g(0) = \frac{1}{R}f(a) \neq 0$, de plus, le nombre de zéros de g sur $D(0, \alpha)$ est le nombre de zéros de f sur $D(a, ar)$. Alors, on applique le théorème 2.4.3, on obtient le résultat désiré.

2.4.4 Théorème de l'application ouverte

Définition 2.4.1 [3].

Soit Ω un ouvert dans \mathbb{C} , on dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une application ouverte, si pour tout ouvert O de Ω , $f(O)$ est un ouvert de \mathbb{C} .

Théorème 2.4.4 ([3] Application ouverte).

Soient Ω un ouvert connexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors, f est ouverte.

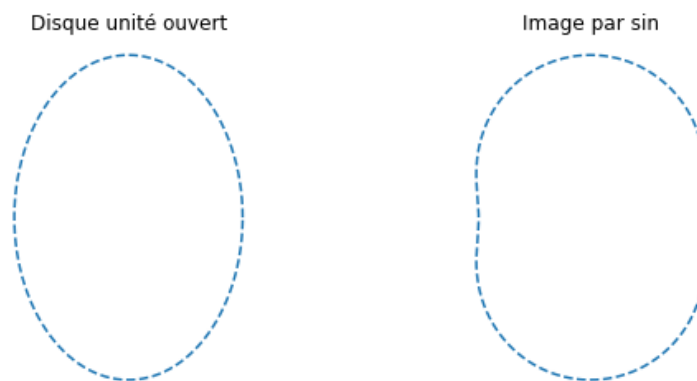


FIGURE 2.3 – Image du disque ouvert par sin.

Preuve :

Soit U un ouvert de Ω . Montrons que $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C} . Soit $w \in f(U)$, alors $\exists z_0 \in U$ tel que $w = f(z_0)$. On pose $g(z) = f(z) - w$, $\forall z \in U$, la fonction g s'annule en z_0 , d'où par le théorème des zéros isolés 1.5.7, il existe un $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et $\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $g(z) \neq 0$. Comme $\partial D(z_0, r)$ est compact, alors la fonction $|g|$ atteint son minimum sur $\partial D(z_0, r)$, alors

$$\exists z_1 \in \partial D(z_0, r), \forall z \in \partial D(z_0, r), |f(z) - w| \geq |f(z_1) - w| > 0.$$

On pose $\varepsilon = |f(z_1) - w|$. Montrons que $D(w, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f(D(z_0, r))$. Soit $\zeta \in D(w, \frac{\varepsilon}{2})$, et posons

$$\begin{aligned} h : \overline{D}(z_0, r) &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) - \zeta. \end{aligned}$$

Cette fonction est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et continue sur $\overline{D}(z_0, r)$, $|h|$ atteint son minimum sur $D(z_0, r)$. En effet

$$\begin{aligned} \forall z \in \partial D\left(w, \frac{\varepsilon}{2}\right), |f(z) - \zeta| &= |f(z) - w - (\zeta - w)| \\ &\geq |f(z) - w| - |\zeta - w| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \\ &> |\zeta - w| = |h(z_0)|. \end{aligned}$$

Alors, h n'atteint pas son minimum sur $\partial D(z_0, r)$, d'où il est atteint sur $D(z_0, r)$, d'après 2.1.5 f s'annule en ce minimum, c'est-à-dire

$$\exists z_2 \in D(z_0, r), f(z_2) = \zeta,$$

alors

$$D\left(w, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset f(D(z_0, r)) \subset f(U),$$

d'où $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C} . □

Par ce théorème, on peut démontrer le résultat suivant.

Corollaire 2.4.1 .

Supposons que Ω est connexe. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $|f|$, $Re(f)$ ou $Im(f)$ est constante, alors f est constante.

Preuve :

Si $|f|$ est constante, posons $r = |f(z_0)| \geq 0$, $z_0 \in \Omega$, donc $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\} = C(0, r)$ n'est pas un ouvert, donc f est constante.

Si $Re(f)$ est constante, on pose $a = Re(f(z_0))$ où $z_0 \in \Omega$. Alors quitte à considérer $g = f - a$ on suppose que $Re(f) = 0$, donc $f(\Omega) \subset i\mathbb{R}$, or $i\mathbb{R}$ est d'intérieur vide donc $f(\Omega)$ n'est pas ouvert, donc f est constante. □

2.4.5 Le problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet a de nombreuses applications importantes dans différents domaines scientifiques. Les solutions du problème de Dirichlet sont utilisées pour modéliser des phénomènes physiques. Ce problème est de trouver une fonction harmonique dans un ouvert connexe borné, qui coïncide avec une fonction continue dans la frontière de cet ouvert. En d'autres termes, soit $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le problème de Dirichlet, c'est de trouver $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, \forall z \in \Omega, \\ u(z) = g(z), \forall z \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (D)$$

Dans cette section, nous donnons la solution explicite dans le cas où $\Omega = D$ est un disque ouvert $D \subset \mathbb{C}$; L'existence, dans le cas général, peut être difficile à établir (théorie de Perron, fonctions barrière). En tout cas, l'unicité de la solution pour un ouvert connexe quelconque est facile à démontrer par le principe du maximum.

Théorème 2.4.5 [4].

Le problème de Dirichlet D admet au plus une solution.

Preuve :

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de Dirichlet D , on pose $v = u_1 - u_2$, alors v est continue sur $\overline{\Omega}$ et harmonique sur Ω et $\forall z \in \partial\Omega, v(z) = 0$, par le principe du maximum sur la fonction v , on déduit que

$$\forall z \in \Omega, |v(z)| \leq 0.$$

Alors, $v \equiv 0$, donc $u_1 = u_2$. □

Définition 2.4.2 [4].

On définit le noyau de Poisson par

$$P : D(0, 1) \times C(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z, \zeta) \longmapsto \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right).$$

La transformée de Poisson de g est définie par

$$Pg : D(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta.$$

Lemme 2.4.2 [4].

- i) $\forall (z, \zeta) \in D(0, 1) \times C(0, 1), P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} > 0.$
- ii) Pg est harmonique sur $D(0, 1).$

Preuve :

- i) Soit $(z, \zeta) \in D(0, 1) \times C(0, 1).$ Alors,

$$2P(z, \zeta) = 2\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta + z}}{\overline{\zeta - z}} = \frac{2|\zeta|^2 - 2|z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

D'où

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} > 0.$$

- ii) Par une application du théorème de dérivation sous le signe intégrale, il s'ensuit que Pg est la partie réelle d'une fonction holomorphe. D'où Pg est harmonique.

□

La transformée de Poisson détermine explicitement la solution du problème de Dirichlet **D** pour $\Omega = D(0, 1).$

Lemme 2.4.3 [4].

- i) Soient $\zeta_0 \in C(0, 1)$ et $\delta > 0,$ $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \sup_{\substack{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta \\ \zeta \in C(0, 1)}} P(z, \zeta) = 0.$
- ii) $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta, \forall z \in D(0, 1).$

Preuve :

- i) Soit $\zeta \in C(0, 1)$ tel que $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta,$ on a

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - \zeta_0| - |z - \zeta_0| \geq \delta - |z - \zeta_0|.$$

Alors

$$\sup_{\substack{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta \\ \zeta \in C(0, 1)}} P(z, \zeta) \leq \frac{1 - |z|^2}{\delta - |z - \zeta_0|} \xrightarrow{z \rightarrow \zeta_0} 0.$$

- ii) On a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, 1)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, 1)} \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} d\zeta = 1,$ d'où le résultat.

□

Théorème 2.4.6 [4].

La fonction définie par

$$u(z) = \begin{cases} (Pg)(z) & \text{si, } z \in D(0,1), \\ g(z) & \text{si, } z \in C(0,1), \end{cases}$$

est solution du problème de Dirichlet D dans $D(0,1)$.

Preuve :

Par construction et le lemme 2.4.2 ii), il suffit de montrer que u est continue en tout point de $C(0,1)$. Soient $\zeta_0 \in C(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. Par ii) du lemme 2.4.3, on a

$$|(Pg)(z) - g(\zeta_0)| = |(Pg)(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})g(\zeta_0)d\theta|,$$

alors

$$|(Pg)(z) - g(\zeta_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})|g(e^{i\theta}) - g(\zeta_0)|d\theta.$$

Par continuité de g en ζ_0 , il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \zeta \in C(0,1), |\zeta - \zeta_0| < \delta \implies |g(\zeta) - g(\zeta_0)| < \varepsilon$. En divisant l'intégrale en deux parties, on trouve que

$$\begin{aligned} |(Pg)(z) - g(\zeta_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|e^{i\theta} - \zeta_0| < \delta \\ \theta \in [0, 2\pi]}} P(z, e^{i\theta})|g(e^{i\theta}) - g(\zeta_0)|d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|e^{i\theta} - \zeta_0| \geq \delta \\ \theta \in [0, 2\pi]}} P(z, e^{i\theta})|g(e^{i\theta}) - g(\zeta_0)|d\theta \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta + \sup_{\substack{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta \\ \zeta \in C(0,1)}} P(z, \zeta) \left(\sup_{\zeta \in C(0,1)} |g(\zeta)| + |g(\zeta_0)| \right) \\ &= \varepsilon + \sup_{\substack{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta \\ \zeta \in C(0,1)}} P(z, \zeta) \left(\sup_{\zeta \in C(0,1)} |g(\zeta)| + |g(\zeta_0)| \right). \end{aligned}$$

Or, d'après i) dans le lemme 2.4.3, il existe $\delta' > 0$ tel que $\forall z \in D(0,1), |z - \zeta_0| < \delta' \implies \sup_{\substack{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta \\ \zeta \in C(0,1)}} P(z, \zeta) < \varepsilon$. Il s'ensuit que,

$$\forall z \in D(0,1), |z - \zeta_0| < \delta' \implies |(Pg)(z) - g(\zeta_0)| \leq \varepsilon(1 + \sup_{\zeta \in C(0,1)} |g(\zeta)| + |g(\zeta_0)|),$$

d'où la continuité de u sur $\overline{D}(0,1)$. □

Remarques 2.4.3 :

Si $\Omega = D(a,r)$, où $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on définit de la même manière le noyau de Poisson et la transformée de Poisson par $P_{D(a,r)}(z, \zeta) = P(\frac{z-a}{r}, \zeta)$, $\forall (z, \zeta) \in D(a,r) \times C(0,1)$ et $(P_{D(a,r)}g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\frac{z-a}{r}, e^{i\theta})g(a + re^{i\theta})d\theta$. Alors, le problème du Dirichlet D admet une solution unique définie par

$$u(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si, } z \in C(a,r). \\ (P_{D(a,r)}g)(z) & \text{si, } z \in D(a,r). \end{cases}$$

En effet, soit h la fonction définie par $h(w) = g(rw + a)$, $\forall w \in D(0,1)$, le problème de Dirichlet D , admet une solution unique v continue sur $\overline{D}(0,1)$ telle que v est harmonique sur $D(0,1)$ et $v(w) = h(w) = g(rw + a)$, $\forall w \in C(0,1)$, la solution explicite de ce problème s'écrit comme $v(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(w, e^{it})f(e^{it})dt$, par un changement de variable $w = \frac{z-a}{r}$, $z \in D(a,r)$, on trouve $u(z) = v(\frac{z-a}{r})$ est une solution de D .

Théorème 2.4.7 .

Soient Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors, u est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Preuve :

Soit $z \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$. Considérons le problème de Dirichlet D pour $D(a,r)$ et $u|_{C(a,r)}$, D admet une solution unique $v = \begin{cases} u(z) & \text{si, } z \in C(a,r). \\ (P_{D(a,r)}u)(z) & \text{si, } z \in D(a,r). \end{cases}$, or u est aussi une solution, il s'ensuit que $u = v$, donc $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{D(z,r)}(z, e^{i\theta})u(z + re^{i\theta})d\theta$, qui est la partie réelle d'une fonction holomorphe comme on a déjà montré dans la démonstration du lemme 2.4.2. \square

Remarques 2.4.4 :

La transformée de Poisson donne une formule qui semble à celle de Cauchy pour les fonctions harmoniques à valeurs réelles. Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Alors,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-a}{r}, e^{it}\right)u(a + re^{it})dt, \forall z \in D(a,r) \subset \Omega.$$

Théorème 2.4.8 [4].

Si Ω est simplement connexe et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique. Alors, il existe une fonction f holomorphe sur Ω , unique à constante près, telle que

$$u = \text{Re}(f).$$

Remarques 2.4.5 :

u est la partie réelle d'une fonction holomorphe qui est de classe C^∞ , alors u est de classe C^∞ au sens de différentiabilité.

2.5 Généralisation du principe du maximum

Supposons que Ω est connexe et borné, nous avons vu que si f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante, le principe du maximum nous donne

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Pour un domaine non borné, cette égalité n'est pas vraie. En effet, soit

$$\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\},$$

Posons

$$f(z) = \exp(\exp(z)), \forall z \in \Omega.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, puisque $\exp(\pm i \frac{\pi}{2}) = \pm i$

$$\exp\left(\exp\left(x \pm i \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp(\pm i \exp(x)),$$

il s'ensuit que $|f(z)| = 1, \forall z \in \partial\Omega$. Mais $f(x) \rightarrow +\infty$ très rapidement quand $x \rightarrow +\infty$ le long de l'axe réel (qui est inclus dans Ω).

Le mot "très" est la clé pour généraliser le principe du maximum. Une méthode développée par Phragmén et Lindelöf permet de montrer des théorèmes du type : si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $|f| < g$, où $g(z) \rightarrow +\infty$ "lentement" quand $|z| \rightarrow +\infty$ dans Ω (le sens de "lentement" dépend seulement de Ω), la fonction f est en fait bornée sur Ω , et ceci, d'après le principe du maximum. Nous allons voir comment appliquer cette méthode dans trois cas, dans les deux premiers cas Ω sera une bande. Dans le premier cas, nous supposons que f est bornée et le théorème améliore la borne. Dans le deuxième cas, nous supposons que f est borné sur la frontière et il vérifie une estimation exponentielle, le théorème nous donne que la fonction est bornée sur Ω . Dans le troisième cas Ω

sera le demi-plan de droit. f va vérifier des conditions similaires au deuxième cas, le théorème nous donne que f est bornée sur Ω .

D'abord, on donne un exemple du même type : Soit f une fonction entière (holomorphe sur \mathbb{C}) vérifiant

$$|f(z)| < 1 + |z|^{1/2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

La fonction f est constante. En effet, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, soit $R > 0$, d'après les inégalités de Cauchy, on a $\forall n \geq 1, |a_n| \leq \frac{\sup\{|f(z)| : |z|=R\}}{R^n} \leq \frac{1+R^{1/2}}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, d'où, $\forall n \geq 1, a_n = 0$.

Théorème 2.5.1 [8].

Soit $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : a < x < b\}$. Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que $\exists B \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq B, \forall z \in \Omega$. On pose $M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$. Alors,

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}, \forall x \in]a, b[.$$

En particulier, $M(x) \leq \max\{M(a), M(b)\}$ il faut noter que l'inégalité donne un renseignement plus fort puisque, en particulier, si $M(a)$ ou $M(b)$ est nul, alors f est identiquement nulle.

Si on supprime l'hypothèse " f est bornée sur Ω ", il se peut que f soit bornée sur le bord de Ω sans être bornée sur Ω comme le montre l'exemple suivant : On prend $a = 0, b = 1$ et $f(z) = \exp(\exp(ipz - ip/2))$, sur le bord de $\Omega, f(z) = \exp(\pm i \exp(-y\pi))$ qui est de module 1 et sur Ωf n'est pas bornée car $f(1/2 + iy) = \exp(\exp(-y\pi)), \forall y \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Supposons d'abord que $M(a) = M(b) = 1$. Dans ce cas, montrons que $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$, on définit :

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z - a)}, \forall z \in \Omega.$$

Pour $z \in \overline{\Omega}, |h_\varepsilon(z)| = \frac{1}{|1 + \varepsilon(z - a)|} \leq \frac{1}{Re(1 + \varepsilon(z - a))} = \frac{1}{1 + \varepsilon(x - a)} \leq 1$. Alors,

$$\forall z \in \partial\Omega, |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1. \tag{*}$$

Comme $Im(1 + \varepsilon(z - a)) = \varepsilon y$, donc $|h_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon|y|}$.

On déduit que

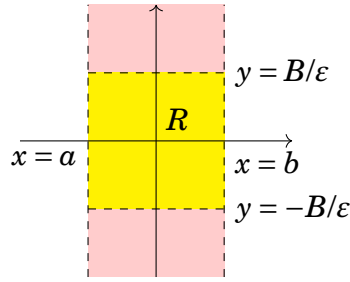
$$\forall z \in \overline{\Omega}, |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \frac{B}{\varepsilon|y|}. \tag{**}$$

Soit R le rectangle dans Ω délimiter par les droites $x = a, x = b, y = -\frac{B}{\varepsilon}$ et $y = \frac{B}{\varepsilon}$, d'après * et **, $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \forall z \in \partial R$, par le principe du maximum, on déduit que $\forall z \in R, |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$, par **, $\forall z \in \Omega \setminus R, |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$, On tend $\varepsilon \rightarrow 0$, il s'ensuit que $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega$.

On définit pour $M > 0, M^z = \exp(z \log(M)), \forall z \in \mathbb{C}$.

Pour le cas général, supposons que $M(a) \neq 0$ et $M(b) \neq 0$, on pose, $g(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)} M(b)^{(z-a)/(b-a)}$, on a g est entière, ne s'annule pas et $1/g$ est borné sur $\overline{\Omega}$ ($|g(z)| = M(a)^{(b-x)/(b-a)} M(b)^{(x-a)/(b-a)}, \forall x \in [a, b]$, qui est compact), de plus $|g(a + iy)| = M(a)$ et $|g(b + iy)| = M(b)$. Alors, la fonction f/g vérifie les hypothèse du premier cas, d'où, $\forall x \in]a, b[, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x + iy)| \leq M(a)^{(b-x)/(b-a)} M(b)^{(x-a)/(b-a)}$.

Si $M(a) = 0$ ou $M(b) = 0$ montrons que $f = 0$ sur Ω . On remarque que si on remplace f par $f + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1, M(a) \neq 0$ et $M(b) \neq 0$, comme $f + 1/n$ tend uniformément vers f on déduit d'après le cas précédant et le théorème de prolongement analytique que $f = 0$ sur Ω , d'où le résultat. \square



Corollaire 2.5.1 .

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédant la fonction $x \mapsto \log(M(x))$ est convexe dans $]a, b[$.

Preuve :

Soit $x, y \in]a, b[$ et $t \in]0, 1[$, montrons que $\log(M(tx + (1 - t)y)) \leq t \log(M(x)) + (1 - t) \log(M(y))$. Supposons que $x < y$, on a $tx + (1 - t)y \in]x, y[$ on applique le théorème précédant pour "a = x" et "y = b".

On déduit que $(y - x) \log(M(tx + (1 - t)y)) \leq (y - (tx + (1 - t)y)) \log(M(x)) + (tx + (1 - t)y - y) \log(M(y))$, d'où $\log(M(tx + (1 - t)y)) \leq t \log(M(x)) + (1 - t) \log(M(y))$. □

Théorème 2.5.2 [8].

Soient $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que $\exists \alpha < 1, A \in \mathbb{R}$, tels que

$$|f(z)| \leq \exp(A \exp(\alpha|x|)), \forall (z = x \pm iy) \in \Omega \text{ et } |f(z)| \leq 1, \forall \left(z = x \pm i\frac{\pi}{2}\right) \in \partial\Omega.$$

Alors, $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega$.

Preuve :

Soient β tel que $\alpha < \beta < 1$ et $\varepsilon > 0$. On pose :

$$h_\varepsilon(z) = \exp\left(-\varepsilon\left(e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right)\right),$$

pour $z = x + iy \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} e^{\beta z} + e^{-\beta z} &= e^{\beta x}(\cos(\beta y) + i \sin(\beta y)) \\ &\quad + e^{-\beta x}(\cos(\beta y) - i \sin(\beta y)), \end{aligned}$$

d'où,

$$|h_\varepsilon(z)| = \exp\left(-\varepsilon\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right) \cos(\beta y)\right),$$

or $\forall |y| \leq \frac{\pi}{2}$ et $\beta|y| < \frac{\pi}{2}$, donc

$$\cos(\beta y) > 0, \forall |y| \leq \pi/2,$$

d'où

$$\exists \delta > 0 : \cos(\beta y) > \delta,$$

on déduit que :

$$|h_\varepsilon(z)| \leq \exp\left(-\varepsilon\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right) \delta\right),$$

ce qui entraîne

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp\left(Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)\right), \forall z \in \Omega$$

de plus

$$\varphi(x) = Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty,$$

car $\alpha < \beta$ et $\delta > 0$. Alors, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+$, tel que $\forall |x| \geq x_0$, $\exp(\varphi(x)) \leq 1$, on pose $D = \{x + iy \in \Omega : |x| < x_0\}$, d'où

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C} \setminus D.$$

En appliquant le principe du maximum sur D , on déduit que :

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \forall z \in D.$$

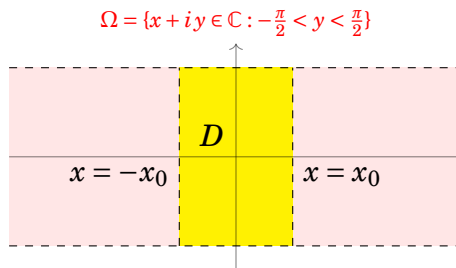
Alors,

$$\forall z \in \Omega, |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

On tend $\varepsilon \rightarrow 0$, il s'ensuit

$$|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega.$$

□



Théorème 2.5.3 [8].

Soient $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$ et f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω . Supposons $\exists A > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tels que $|f(z)| \leq A \exp(|z|^\alpha)$, $\forall z \in \Omega$ et $|f(z)| \leq 1$, $\forall z = iy \in \partial\Omega$. Alors, $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Omega$.

Preuve :

Soient $\alpha < \beta < 1$ et $\varepsilon > 0$. On pose $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon z^\beta)$, $\forall z \in \overline{\Omega}$, h_ε est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω et (On rappelle que $Re(z^\beta) = 0$, si $z \in \partial\Omega$ et $Re(z^\beta) = |z|^\beta \cos(\beta \arctan(y/x)) > 0$ si $z \in \Omega$.) $\forall z \in \overline{\Omega}$, $|h_\varepsilon(z)| = \exp(-\varepsilon Re(z^\beta)) \leq 1$. Donc $\forall z \in \partial\Omega$, $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$.

Pour $z = x + iy \in \Omega$, $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp(A|z|^\alpha - \varepsilon|z|^\beta \cos(\beta \arctan(y/x))) \xrightarrow[|z| \rightarrow +\infty]{z \in \Omega} 0$. En effet, comme $\beta < 1$

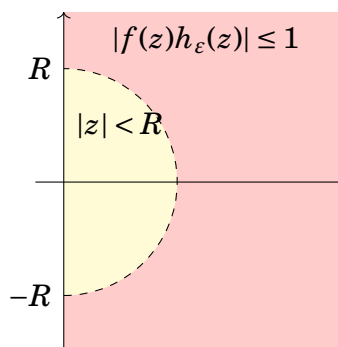
on a $\beta \arctan(y/x) \in [-\pi\beta/2, \pi\beta/2] \subset]-\pi/2, \pi/2[$, en conséquence $\exists \delta > 0$ tel que $\cos(\beta \arctan(y/x)) \geq \delta$, il s'ensuit $A|z|^\alpha - \varepsilon|z|^\beta \cos(\beta \arctan(y/x)) = |z|^\beta (A|z|^{\alpha-\beta} - \varepsilon \cos(\beta \arctan(y/x))) \leq \underbrace{|z|^\beta}_{\rightarrow +\infty} (\underbrace{A|z|^{\alpha-\beta}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\varepsilon \delta}_{< 0}) \xrightarrow[|z| \rightarrow +\infty]{z \in \Omega} -\infty$.

Alors, $\exists R > 0$ tel que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Omega, |z| \geq R$.

Par le principe de maximum, on déduit que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Omega, |z| \leq R$.

On tend $\varepsilon \rightarrow 0$, il s'ensuit que, $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in \Omega$.

□



Remarques 2.5.1 :

Si $\alpha = 1$ le résultat n'est plus vrai, pour $f(z) = \exp(z)$, on a sur $\partial\Omega$, $|\exp(iy)| = 1$ et $\forall z \in \Omega$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z)) \leq \exp(|z|)$ mais $\exp(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^+} +\infty$.

2.6 Réciproque du principe du maximum

Dans cette section, on donne un théorème qui montre que presque toutes les fonctions complexes qui vérifient une version faible du principe du maximum localement, sont holomorphes.

Théorème 2.6.1 [8].

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\overline{D}(0,1)$ à valeurs dans \mathbb{C} . On suppose que F contient tous les polynômes et que $\forall f \in F$, on a

$$\sup_{z \in D(0,1)} |f(z)| = \sup_{z \in C(0,1)} |f(z)|.$$

Alors, $\forall f \in F$, f est harmonique.

Théorème 2.6.2 [8].

Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\overline{D}(0,1)$ à valeurs dans \mathbb{C} qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) $1 \in M$.
- ii) $f \in M \Rightarrow z \mapsto zf(z) \in M$.
- iii) $f \in M \Rightarrow \sup_{z \in D(0,1)} |f(z)| = \sup_{z \in C(0,1)} |f(z)|$.

Alors, $\forall f \in M$, f est holomorphe sur $D(0,1)$.

Preuve :

On pose j défini par $j(z) = z, \forall z \in \overline{D}(0,1)$.

Par i) $1 \in M$ et par ii) $\forall n \geq 1, z \mapsto z^n \in M$, comme M est un espace vectoriel, il s'ensuit que M contient tous les polynômes, par iii), M satisfait toutes les conditions du théorème 2.6.1, alors pour tout $f \in M$, f est harmonique.

Soit $f \in M$, montrons que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann 1.5.2. On a

$$\frac{\partial(jf)}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial j}{\partial z}}_{=1} f + j \frac{\partial f}{\partial z} = f + j \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Alors

$$\frac{\partial^2(jf)}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\frac{\partial j}{\partial \bar{z}}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial z} + j \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z},$$

or $f \in M \Rightarrow jf \in M$, donc f et jf sont harmoniques, d'où $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$ et $\frac{\partial^2 jf}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$, ainsi, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Donc pour tout $f \in M$, f satisfait les équations du Cauchy-Riemann, par suite f est holomorphe sur $D(0,1)$. □

Conclusion

En résumé, le principe du maximum pour les fonctions holomorphes est un théorème très fort en analyse complexe. C'est un moyen de démontrer plusieurs théorèmes fondamentaux.

J'ai été frappé par la manière dont une propriété simple peut conduire à plusieurs résultats importants en analyse complexe. Cela témoigne de l'importance des concepts de base en mathématiques, qui peuvent avoir des applications profondes et diverses.

Le principe du maximum est une propriété puissante qui s'applique à de nombreuses fonctions en analyse complexe. Il est essentiel pour plusieurs applications et résultats en mathématiques. En effet, il est souvent utilisé pour établir l'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles, par exemple le problème de Dirichlet. De plus, il est utilisé pour étudier les propriétés des fonctions harmoniques, qui jouent un rôle important dans de nombreux domaines de la physique.

Bibliographie

- [1] M. Akkouchi, *Cours sur Topologie 1*, SMA, S5, 2022.
- [2] K. Ezzinbi, *Cours sur l'Analyse Complexe*, SMA, S5, 2022.
- [3] D. Häfner, *Analyse Complexe*, Notes de cours prises par Alexis Marchand, ENS de Lyon, S1 2017-2018, Niveau L3.
- [4] F. D. Marçay, *Cours sur les fonctions harmoniques*, Département de mathématiques d'Orsay; Université Paris-Sud, France.
- [5] P. Tauvel, *Analyse Complexe pour la Licence 3*, Dunod, 2020.
- [6] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press; 2nd edition , May 13, 1976.
- [7] *Variable Complexe Licence de Mathématiques*, http://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement_fichiers/PolyVC.pdf.
- [8] R. Walter, *Real and Complex Analysis* (Higher Mathematics Series), McGraw Hill; 3rd edition , May 1, 1986.